ΙΕΚ Αγρινίου
Τεχνικός Τεχνολογίας Ίντερνετ
Εισαγωγή στην Πληροφορική
Εξάμηνο 2010Β
Στέφανος-Κων/νος Πουρσαλίδης
http://users.sch.gr/poursali

Αναπαράσταση και Κωδικοποίηση Πληροφορίας (Μέρος 2ο)

1. Αριθμητικές και Λογικές Πράξεις με δυαδικούς αριθμούς

Όπως είναι λογικό με τους δυαδικούς αριθμούς, που σε προηγούμενο μάθημα είδαμε πως μετατρέπουμε από και προς το γνώριμό μας δεκαδικό σύστημα αρίθμησης, μπορούμε να κάνουμε και πράξεις. Μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα η πρόσθεση. Επίσης, ιδιαίτερο ενδιαφέρον προκαλούν οι λογικές πράξεις που θα δούμε παρακάτω. Τέλος, θα δούμε τι είναι και σε τι χρησιμεύει η ολίσθηση.

2. Λογικές Πράξεις: AND, OR, XOR, NOT

Αντιστοιχίζοντας τα δυαδικά ψηφία 0 και το 1 στο ψευδές και στο αληθές αντίστοιχα:

$$0 := \psi\varepsilon\upsilon\delta\acute{\varepsilon}\varsigma, \quad 1 := \alpha\lambda\eta\theta\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Μπορούμε να κάνουμε κάποιες ενδιαφέροντες λογικές πράξεις.
Λογική ονομάζεται μία πράξη που το αποτέλεσμά της μπορεί να είναι είτε αληθές είτε ψευδές.

$$\text{Λογική Πράξη} := \begin{cases} 0, & \text{αν η πρόταση είναι ψευδής} \\ 1, & \text{αν η πρόταση είναι αληθής} \end{cases}$$

Για να καταλάβουμε τις λογικές πράξεις φτιάχνουμε *πίνακες αληθείας*. Στο αριστερό μέρος γράφουμε τις λογικές προτάσεις x και y και από κάτω όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τιμών τους (δηλαδή όλους τους δυνατούς συνδυασμούς 0 και 1 που για δύο μεταβλητές είναι 4 (00, 01, 10, 11). Έπειτα, στο δεξί μέρος γράφουμε το αποτέλεσμα της πράξης αυτής.

2.1. Λογικό ΚΑΙ (AND)

Μια λογική πρόταση που συνδέει δυο λογικές προτάσεις με το λογικό ΚΑΙ αποτιμάται σε αληθής αν όλα τα συμμετέχοντα μέρη της πρότασης είναι αληθή, διαφορετικά αποτιμάται σε ψευδής. Ο αντίστοιχος πίνακας αληθείας έχει ως εξής:

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Έτσι, βλέπουμε ότι η μόνη περίπτωση που το x AND y είναι αληθής είναι όταν x=1 και y=1.

2.2. Λογικό Ή (OR)

Δύο λογικές προτάσεις που συνδέονται με το λογικό Ή, είναι αληθής αν μία τουλάχιστον από τις δύο (ή και οι δύο) είναι αληθής. Ο πίνακας αληθείας δίνεται παρακάτω.

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Έτσι, βλέπουμε ότι μόνη περίπτωση να είναι ψευδής είναι όταν x=0 και y=0. Σε όλες τις άλλες δυνατές περιπτώσεις είναι αληθής.

2.3. Αποκλειστικό Ή (XOR – eXclusive OR)

Η λογική πράξη Αποκλειστικό Ή (xor) είναι αληθής όταν μία και μόνο μία από τις δύο λογικές προτάσεις είναι αληθής (δεν θέλουμε δηλαδή να είναι αληθής και οι δυο προτάσεις ταυτόχρονα).

x	y	x XOR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Παρατηρούμε ότι, το x XOR y είναι αληθής μόνο αν x=1,y=0 ή αν x=0,y=1. Στις περιπτώσεις που το x,y είναι ταυτόχρονα αληθής ή ψευδής η πρόταση XOR αποτιμάται σε ψευδής.

2.4. Άρνηση (NOT)

Ενώ οι προηγούμενες λογικές πράξεις AND, OR, XOR αναφέρονται σε δύο μεταβλητές x, y η λογική πράξη της άρνησης NOT είναι ένας μοναδιαίος τελεστής (εφαρμόζεται δηλαδή σε μία μόνο μεταβλητή). Το μόνο που κάνει αυτός ο τελεστής είναι να αντιστρέφει το λογικό αποτέλεσμα από αληθή σε ψευδή και αντίστροφα:

x	NOT x
0	1
1	0

3. Πρόσθεση Δυαδικών Ακεραίων

Έστω ότι έχουμε τους δυαδικούς ακεραίους τους οποίους θέλουμε να προσθέσουμε.

1011111 + 0010100

Με τη μέχρι τώρα γνώση μας θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε και τους δύο σε δεκαδικούς, να κάνουμε τη γνωστή μας πρόσθεση εκεί και έπειτα να μετατρέψουμε το αποτέλεσμα πάλι πίσω στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης. Προφανώς ο υπολογιστής κάνει πράξεις απευθείας στο δυαδικό σύστημα και αυτό θα δούμε αμέσως τώρα πως γίνεται.
Πρέπει να έχουμε υπόψη μας τον εξής πίνακα για να υπολογίζουμε τα κρατούμενα που ενδεχομένως προκύψουν κατά τη διάρκεια της πρόσθεσης.

0 + 0 = 0	
0 + 1 = 1	
1 + 0 = 1	
1 + 1 = 10	Άθροισμα: 0, κρατούμενο: 1
1 + 1 + 1 = 11	Άθροισμα: 1, κρατούμενο: 1

Έτσι, η πρόσθεση των παραπάνω αριθμών μπορεί να εκτελεστεί ως εξής:

		1	1	1	← κρατούμενα			
	1	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	
+	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	
	1	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	

4. Ολίσθηση αριστερά και δεξιά

Η πράξη της ολίσθησης είναι πολύ συνηθισμένο στο υλικό του υπολογιστή και βολεύει πάρα πολύ. Έχουμε για παράδειγμα τον δυαδικό:

$$00110101$$

Αν εφαρμόσουμε ***ολίσθηση δεξιά κατά μία θέση***, αυτό σημαίνει ότι «σπρώχνουμε» τα ψηφία του προς τα δεξιά κατά μία θέση. Σε αυτή τη περίπτωση το τελευταίο ψηφίο του «πέφτει στο γκρεμό» και εξαφανίζεται. Η πρώτη θέση του αριθμού συμπληρώνεται με 0. Έτσι, ο αριθμός που προκύπτει είναι ο:

$$00110101 \gg 1 = 00011010$$

Το σύμβολο >> 1 υποδηλώνει ολίσθηση δεξιά κατά μια θέση. Από μαθηματική σκοπιά αυτό που συμβαίνει είναι ότι ο αριθμός διαιρείται με το 2 και το τυχόν υπόλοιπο απορρίπτεται. Βέβαια, το υπόλοιπο είναι ακριβώς το ψηφίο που «έπεσε στο γκρεμό».
Αντίστοιχα, η ***ολίσθηση αριστερά κατά μία θέση*** έχει το εξής αποτέλεσμα στον παραπάνω αριθμό:

$$00110101 \ll 1 = 01101010$$

Αντίστοιχα εδώ η κενή τελευταία θέση «γεμίζει» με 0. Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η πράξη αυτή προκαλεί διπλασιασμό της τιμής του. Βέβαια, εδώ υπάρχει μια εξαίρεση. Αν το απορριφθέν bit τυχαίνει να είναι 1 τότε ο αριθμός δεν διπλασιάζεται καθώς δεν χωράει στις συγκεκριμένες θέσεις. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται ***υπερχείλιση (overflow)***.

Σημείωση: στην πραγματικότητα τα ψηφία που «χάνονται» από τις ολισθήσεις μπαίνουν σε έναν καταχωρητή του επεξεργαστή ώστε να είναι διαθέσιμα αν χρειαστούν σε κάποια επόμενη πράξη.

5. Επιπλέον Παρατηρήσεις - Σημειώσεις

Παραπάνω είδαμε τα βασικά των λογικών πράξεων. Ωστόσο μένει να διευκρινίσουμε κάποιες ακόμη πτυχές του ζητήματος αυτού. Για παράδειγμα, πως αποτιμάται μια σύνθετη λογική πρόταση όπως η ακόλουθη:

$$x\ AND\ y\ OR\ z$$

Συγκεκριμένα τα προβλήματα που τίθενται είναι 2: πρώτον με ποια σειρά θα γίνουν οι πράξεις (προτεραιότητα τελεστών) και πώς θα γίνουν εφόσον μέχρι τώρα είδαμε να εφαρμόζονται οι λογικοί τελεστές μόνο σε δύο μεταβλητές.
Ευτυχώς και οι δύο απαντήσεις είναι ξεκάθαρες και εύκολα κατανοητές. Η προτεραιότητα των τελεστών έχει ως εξής:

$$Προτεραιότητα\ λογικών\ τελεστών: NOT, AND, OR/XOR$$

Με λίγα λόγια πρώτα εκτελείται η άρνηση, μετά το λογικό ΚΑΙ και τέλος το OR και XOR. συγκεκριμένα για τοτουςελεστές OR, XOR εκτελούνται με τη σειρά που τους συναντάμε από τα αριστερά στα δεξιά.
Έτσι, η ακόλουθη πρόταση είναι ίδια με παρενθέσεις:

$$NOTx\ AND\ y\ OR\ z\ XOR\ k\ AND\ m = \Big(\big((NOTx) AND\ y\big) OR\ z\Big)\ XOR\ (k\ AND\ m)$$

Τώρα πάμε να δούμε πως μπορούμε να αποτιμήσομε την πρόταση:

$$x\ AND\ y\ OR\ z$$

Για να το κάνουμε αυτό, λαμβάνουμε υπόψη μας την προτεραιότητα των τελεστών. Έτσι, πρώτα πρέπει να εκτελέσουμε το AND και έπειτα το OR. Αν ονομάσουμε το αποτέλεσμα x AND y, k τότε μένει να κάνουμε τη πράξη k OR z για να πάρουμε το συνολικό αποτέλεσμα. Ο πίνακας αληθείας έχει ως εξής (επειδή έχω 3 μεταβλητές, θέλω 2^3=8 γραμμές):

x	y	z	k=x AND y	k OR z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Επειδή, k = x AND y η τελευταία στήλη k OR z είναι στην ουσία η λογική πράξη: x AND y OR z.